



# 有限長度多孔性吸音平板之動態音響阻抗分析與量測 Prediction and Measurement of Acoustical Impedance for Slab Type Foam with Finite Length

計畫編號：NSC 86-2212-E-032-005

執行期限：85/8/1 — 86/7/31

主持人：蔡慧駿 淡江大學機械系副教授

共同主持人：葉豐輝 淡江大學機械系副教授

一、中文摘要 (關鍵詞：多孔彈性吸音平板、動態音響阻抗、噪音控制、振動控制、有限元素法。)

本計畫旨在建立有限長度多孔彈性吸音平板之動態音響阻抗分析模式及量測技術，並藉由實驗結果與完全動態理論解析解比較驗證之一致性，進而直接將理論推廣應用到各種不同多孔吸音平板音響阻抗分析上。研究中引用 Biot 多孔彈性理論推導出多孔彈性吸音平板的三維運動方程組，經有限元素法之 Galerkin 法求得頻域下吸音平板之剛性矩陣，接而透過吸音平板之力與位移傳輸函數得到多孔吸音平板之動態音響阻抗。在完成三維、二維及一維動態音響阻抗比較研究後，再與實際量測之平板音響阻抗做一比較，以驗證理論之正確性。分析中發現平板長厚比變大時，平板之動態音響阻抗亦隨之增大，惟其臨界頻率則會向低頻方向移動；若固定平板之尺寸而增加其流阻大小，則會使臨界頻率向低頻轉移，但不會影響平板之動態音響阻抗。因此，適當控制平板尺寸或流阻，將足以達到控制或改善環境噪音振動之效。

英文摘要 (Keyword: poroelastic slab, acoustic impedance, noise control, vibration control, finite element method)

In this study, theoretical and experimental methods are proposed to obtain the acoustic impedance of a poroelastic slab. After the predicted results are verified by experimental results of air filled polyurethane foams, the theoretical method is then applied for parametric studies. First, Biot's poroelasticity theory is used to formulate the equations of motion on poroelastic slabs. The Galerkin type finite element method is used to solve these equations and the stiffness matrix is then derived. The acoustic impedance is then obtained for the case of an impulsive displacement loading applied to the top surface of a slab. Comparisons of three dimensional, two dimensional, and one dimensional acoustic impedances as well as the experimental results are then made. It is found that increasing the value of the length to thickness ratio will move the critical frequency to the lower frequency side, and it increases the impedance as well. If the dimension of the slab is fixed, it is observed that the critical frequency decreases as the dissipation coefficient increases, but the maximum value of the impedance is independent of the dissipation coefficient. Such a slab can thus be applied for noise and vibration control by adjusting its geometry or the dissipation coefficient.

## 二、計畫緣由與目的

系統中的振動行為是使結構產生應力、應變及噪音主要的原因之一。若能將振動量降至最低，相對的就會提高結構的安全性及減少噪音。故降低振動、消除噪音也就成為工程師努力的方向。

多孔性材料 (Porous Material) 如聚合泡綿 (Polyurethane Foam)，因內部有互相連通的孔洞，其孔

洞內可含有液體或氣體流動，當受荷重時，會因內部流體流動而產生特殊的動態反應，與一般固體之動態特性完全不同。它的能量耗損模數能在特定頻率範圍內將系統振動振幅降低，利用此特性作為減振和吸音之用。深入瞭解此種材料之動態特性至為重要。雖然多位研究學者 [1-6] 曾應用 Biot 理論探討多孔材料相關特性，但皆以簡化方式探討之，因此本計畫將以完全動態理論為基礎，且加入彎矩效應對吸音平板的影響，探討攸關多孔彈性材料動態反應之複數動態模數，亦就是材料動態反應之複數音響阻抗 (Complex Acoustic Impedance)，以彌補簡化理論之誤差；並且更進一步建立吸音平板於噪音控制之應用方法及主要控制參數。如此一來了解了多孔彈性材料的特性及性質變異係數後，即可應用到工業界，對所需環境或結構達到最好的噪音和振動控制。

## 三、研究方法與成果

為了能夠徹底瞭解多孔吸音平板之動態音響阻抗，本研究首先應用 Biot 多孔理論以探討平板之運動方程組，其次利用有限元素分析及傳輸函數的推導得到平板之音響阻抗，最後利用實驗加以驗證理論之準確性。

### 3.1 多孔彈性吸音平板運動方程組

應用 Biot 多孔理論 [7-9] 可推導出多孔彈性材料應力應變關係並以能量法獲得多孔彈性吸音平板之運動方程組為：

$$\begin{aligned} & N \nabla^2 \bar{u} + \nabla[(A + N)e + Q\varepsilon] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\bar{u} + \rho_{12}\bar{U}) + b \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} - \bar{U}) \\ & \nabla[Qe + R\varepsilon] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\bar{u} + \rho_{22}\bar{U}) - b \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} - \bar{U}) \quad \dots\dots (1) \end{aligned}$$

其中  $\bar{u} = u_x\bar{i} + u_y\bar{j} + u_z\bar{k}$  為固體位移向量， $\bar{U} = U_x\bar{i} + U_y\bar{j} + U_z\bar{k}$  為流體部分位移向量；而固體應變關係  $e$  為  $e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ ，流體應變關係  $\varepsilon$  為  $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ ； $N, A, Q, R$  為材料彈性係數； $b$  為流阻係數； $\rho_{11}$ 、 $\rho_{12}$  及  $\rho_{22}$  則為質量密度。

### 3.2 有限元素法

圖 1 為長度  $L$ 、寬度  $W$ 、厚度  $H$  的多孔彈性吸音上平面受衝擊位移  $\delta(t)$  驅動示意圖；其底部的硬板則固定不動。依據 Biot 之理論及參考圖 2 的座標，三維多孔彈性吸音平板的動態方程組經 Laplace 轉換後再加入位移及應力起始條件可推導得：

$$\begin{aligned}
L_1(\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z, \bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z) &= N \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{u}_x + \\
& (A+N) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) + Q \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} \right) \\
& - s^2 (\rho_{11} \bar{u}_x + \rho_{12} \bar{U}_x) - bs(\bar{u}_x - \bar{U}_x) = 0, \\
L_2(\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z, \bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z) &= N \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{u}_y + \\
& (A+N) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) + Q \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} \right) \\
& - s^2 (\rho_{11} \bar{u}_y + \rho_{12} \bar{U}_y) - bs(\bar{u}_y - \bar{U}_y) = 0, \\
L_3(\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z, \bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z) &= N \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{u}_z + \\
& (A+N) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) + Q \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} \right) \\
& - s^2 (\rho_{11} \bar{u}_z + \rho_{12} \bar{U}_z) - bs(\bar{u}_z - \bar{U}_z) = 0, \\
L_4(\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z, \bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) + \right. \\
& \left. R \left( \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} \right) \right] \\
& - s^2 (\rho_{12} \bar{u}_x + \rho_{22} \bar{U}_x) + bs(\bar{u}_x - \bar{U}_x) = 0, \\
L_5(\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z, \bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ Q \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) + \right. \\
& \left. R \left( \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} \right) \right] \\
& - s^2 (\rho_{12} \bar{u}_y + \rho_{22} \bar{U}_y) + bs(\bar{u}_y - \bar{U}_y) = 0, \\
L_6(\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z, \bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ Q \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) + \right. \\
& \left. R \left( \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} \right) \right] \\
& - s^2 (\rho_{12} \bar{u}_z + \rho_{22} \bar{U}_z) + bs(\bar{u}_z - \bar{U}_z) = 0
\end{aligned}$$

..... (2)

其中  $\bar{u}_x$ 、 $\bar{u}_y$ 、 $\bar{u}_z$ 、 $\bar{U}_x$ 、 $\bar{U}_y$  及  $\bar{U}_z$  分別為位移分量  $u_x$ 、 $u_y$ 、 $u_z$ 、 $U_x$ 、 $U_y$  及  $U_z$  之 Laplace 轉換。

其次運用 Galerkin 法、有限元素法及 Green-Gauss 理論可由 (2) 式推導出三維多孔彈性體元素有限元素方程組為：

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad \text{..... (3)}$$

式中  $[K]$  為重組過的剛性矩陣， $\{q\}$  為總體位移力矩向量，而  $\{F\}$  為總體荷重向量。從 (3) 式即可得到計畫所需之多孔彈性吸音平板之動態音響阻抗。

### 3.3 實驗原理

多孔彈性吸音平板的動態音響阻抗  $\bar{E}(\omega)$  可用複數型態表示之，亦就是  $\bar{E}(\omega) = E_s + iE_t = E_s(1 + i\eta)$ ，其中實數部分相當於平板之勁度模數，而虛數部分相當於平板之耗損模數， $\eta$  為耗損因子。因為實驗系統之組合類

似一維質塊模型系統，如圖 3 所示。故可以一維質塊—複數阻尼系統加以模擬。在實驗中首先測量出系統之 Accelerance 轉換函數  $H(\omega)$  可得：

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{\ddot{W}}{F} \\
&= \frac{-\omega^2 \left( \frac{A}{h} E_s - m\omega^2 \right)}{\left( \frac{A}{h} E_s - m\omega^2 \right)^2 + \left( \frac{A}{h} E_t \eta \right)^2} + \\
&\quad \frac{\omega^2 \left( \frac{A}{h} E_t \eta \right)}{i \left[ \left( \frac{A}{h} E_s - m\omega^2 \right)^2 + \left( \frac{A}{h} E_t \eta \right)^2 \right]} \\
&= \bar{x} + i\bar{y} \quad \text{..... (4)}
\end{aligned}$$

其中  $A$  為平板之面積， $h$  為平板之厚度， $m$  為上平板之質量， $\omega$  為頻率， $W$  為平板之位移量， $F$  為平板之受力。將 (4) 式整理可得多孔吸音平板之儲存模數及耗損勁度分別為：

$$\begin{aligned}
E' &= E_s = \frac{h}{A} \omega^2 \left( m - \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \right) \\
E'' &= E_t = \frac{h}{A} \omega^2 \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \right) \quad \text{..... (5)}
\end{aligned}$$

### 3.4 實驗架構

實驗流程示意圖如圖 3 所示。實驗執行時，藉由 Random 信號以擷取材料在各種不同的頻率下所承受之動態行為。Random 訊號透過信號放大器放大後直接傳輸至振動機，而振動機將訊號轉成振動量並經由阻抗頭傳遞到測試材料之上平面。測試材料被兩塊厚度約為 8mm 厚的鋁合金所夾持，該鋁合金的長寬尺寸與測試材料相同，鋁合金上平板連接著阻抗頭，下平板緊貼著振動機夾具底部。多孔吸音平板所承受之負荷及其反應加速度的變化均透過阻抗頭傳送到頻譜分析儀上，並由分析儀上擷取所需頻率範圍下之反應資料。

## 四、結果與討論

多孔吸音平板之剛性矩陣在代入材料係數並執行數值分析後即可模擬出多孔彈性吸音平板在完全動態理論下的動態音響阻抗；研究中，同時藉由實驗的結果加以驗證其正確性。

### 4.1 動態音響阻抗

當吸音平板側平面為不可穿透時，此時平板動態行為為類似一均質平板，因此耗損模數為零，而儲存模數為一常數，如圖 4 和圖 5 中虛線所表現的現象。若平板側平面具穿透性時，在低頻時整個平板的儲存模數是由固體單獨提供；隨著頻率增加，流體與固體交互作用提昇，則儲存模數明顯上升，而耗損模數也會由原先的零值漸漸的提高，進而達到一最大值，此時耗損能力達到最大值的頻率，稱為多孔彈性吸音平板的臨界頻率。到了高頻時，流體與固體幾乎成為一體，此時類似側平面具有不可穿透性之特性而使得儲存模數又趨於定值，而耗損模數則將漸漸為零，此現象由圖 4 及圖 5 中可以明顯看出。

在二維理論中平板長度影響被列入考量。若長度變

長而厚度保持定值，也就是長厚比變大時，因流體流動距離加長，此時吸音平板之動態反應也會與側平面為不穿透的動態反應現象相仿，由圖4和圖5可以明顯發現這種特性。圖4中可以看到儲存模數曲線會因長厚比增大向低頻方向偏移，進而終將趨近於一維平板動態反應所產生的現象。由圖5亦可發現當長厚比漸漸增大時，此時多孔吸音平板的臨界頻率，也會逐漸向低頻移動，而耗損模數也必將漸漸為零。另從圖4和圖5也可觀察出類靜態和完全動態分析之比較；在低頻時類靜態分析可以成功的模擬出材料之動態特性，但是高頻時因忽略了流體與固體的動態效應，導致類靜態分析無法有效的解析出平板的動態行為。

若將二維模型擴展成三維模型分析時結果有明顯的不同。由圖6和圖7可以觀察出在三維模型之側平面效應。三維模型分析之臨界振頻要比二維模型分析來的略高，而耗損模數預估之最大值則降低。從此二圖亦可看出由三維到二維進而簡化到一維模型的分析趨勢和圖4及圖5所探討二維和一維之間關係的現象相符。圖8及圖9探討長厚比對三維模型之儲存模數和耗損模數的影響。從圖中可發現到在三維模型中，若將平板的寬和厚設為定值時，則長度越大時其曲線越傾向於二維模型的動態反應現象。由圖9同樣也可發現到在三維模型中，長厚比對耗損模數的影響和二維理論時是相同的，它會影響到多孔彈性吸音平板的臨界振頻及多孔吸音平板之能量耗損能力。這種現象說明了增加平板的長度會降低臨界振頻，但就其減振或吸音能力而言反而提升。

另外，另一個因素—流阻，亦是重要的影響條件，如圖10和圖11中可以發現不同的流阻雖然不會影響多孔彈性吸音平板吸音或吸振的能力，但卻會使得平板的臨界振頻產生轉移，從圖中可以看出流阻越低的材料，越適用於低頻範圍，此現象意味著在相同的尺寸限制條件下，改變多孔彈性吸音平板的材料或改變材料中的流體，即可應用在不同的影響頻率。

#### 4.2 實驗結果分析

圖12至圖13分別表示出材料A及材料B受激振後所反應出的動態行為。由(5)式可以得知轉換函數和耗損模數的關係，所以從以上圖中可以發現到流道較大的材料轉換函數之最大值較低，因此會有比較明顯的阻尼效果，而且共振頻率也會比較偏高例如材料A3及B3。故本計畫將使用材料A3及B3與理論分析結果進行討論。

其次透過(5)式的探討得知，經由轉換函數的實數和虛數部分可以得到材料A及B之儲存模數( $E'$ )和耗損模數( $E''$ )，如圖14及圖15所示。因為材料A之流阻小於材料B，所以在圖15中不難發現實驗結果中所推算出的耗損模數確實符合上述觀念，換句話說，由此可以推知，流阻小的材料，其阻尼效果會不明顯。

#### 4.3 結語

由分析結果可觀察出，在三維完全動態理論研討中，若將平板一方向尺寸延伸至無窮長時，所得到之結果和二維之分析結果相似，若同時再將另一方向尺寸延伸至無窮長，則可再模擬出一維之動態行為模式，且與一維理論之探討結果相同；此現象顯現三維理論分析的應用性及正確性。由於三維理論完全考慮分佈於整個平板的流體流動對吸音平板動態行為的影響，因此由三維理論所預估之音響阻抗值較低於二維理論所預估；由於

充分考慮流體的作用，三維完全動態理論更具準確性。其次，在研究中亦發現，當平板的尺寸有所變化時，平板的動態行為也會受其影響。當長厚比增大時，其動態行為會漸漸傾向於二維的行為模式，而此時儲存及耗損能力會變大，但平板的臨界頻率則會降低。此外在不改變平板的尺寸情況下，改變吸音平板的流阻如更換多孔材料孔洞係數或更換充斥材料內的流體，則可使得吸音平板的臨界頻率發生轉移，但不會改變平板的耗損模數。因此只要了解吸音平板的尺寸及種類，就可利用本計畫採用的三維完全動態理論加以模擬其動態音響阻抗並了解平板之適用性，調整出有利於受控環境的吸音平板；或者根據環境的須要，蒐集環境的相關資料，即可反求適當之吸音平板的尺寸或種類，達到最佳控制之效。而在實驗方面，本計畫完整的建立了一套動態音響阻抗量測系統及分析模式；能夠測量出各種不同尺寸、種類，甚至不同模式（如板、樑形狀材料）之音響阻抗及動態特性。從實驗結果得知，當實驗材料的長厚比增大時，則儲存和耗損能力會比較好，且流阻係數大的實驗材料，其耗損能力會比較明顯，這些實驗結果和理論所模擬的現象是類似，且所測得之實驗材料的臨界頻率也如理論所討論的結果相符，由此可以證明本計畫所探討出的三維完全動態理論之合理性以及正確性。

#### 五、參考文獻

- [1] N. B. Chakravarti, "Dynamic stresses in a poroelastic infinite medium with a spherical cavity," *J. S.E.R.*, 5(2), 309-318, 1962.
- [2] G. Paria, "Flow of fluids through porous deformable solids," *Appl. Mech. Rev.*, 16(6), 421-423, 1963.
- [3] A. M. Wijesinghe and H. B. Kingsbury, "On the dynamic behavior of poroelastic materials," *J. Acoust. Soc. Am.*, 65(1), 90-95, 1979.
- [4] R. Burrige and C. A. Vargas, "The fundamental solution in dynamic poroelasticity," *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 58, 61-90, 1979.
- [5] A. Okuno and H. B. Kingsbury, "Dynamic modulus of poroelastic materials," *J. Appl. Mech.*, 56, 535-540, 1989.
- [6] S. Bougacha and J. L. Tassoulas, "Analysis of Foundations on Fluid-Filled Poroelastic Stratum," *J. Eng. Mech.*, 119(8), 1632-1648, 1993.
- [7] M. A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid-I: low-frequency range, II: higher frequency range," *J. Acoust. Soc. Am.*, 28(2), 168-191, 1956b.
- [8] M. A. Biot, "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media," *J. Appl. Phys.*, 33, 1482-1498, 1962.
- [9] M. A. Biot, "General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material," *J. Appl. Mech. (Trans. ASME)*, 23, 91-96, 1955a.

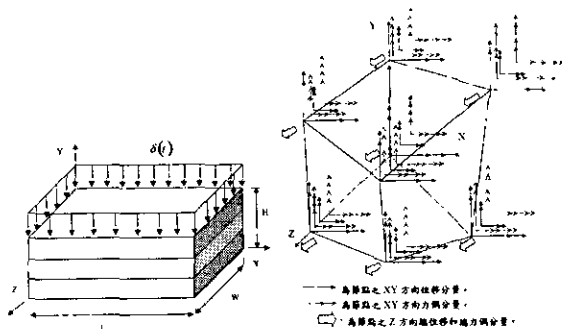


圖 1：三維多孔彈性吸音  
平板上平面受衝擊  
位移  $\delta(t)$  作用示意圖

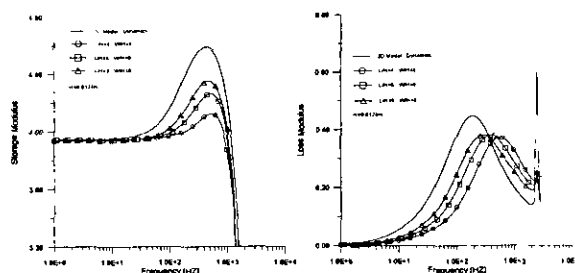


圖 8：儲存模數—  
長厚比影響  
分析比較

圖 9：耗損模數—  
長厚比影響  
分析比較

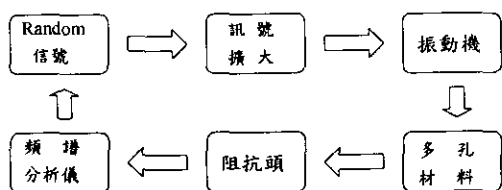


圖 3：實驗流程示意圖

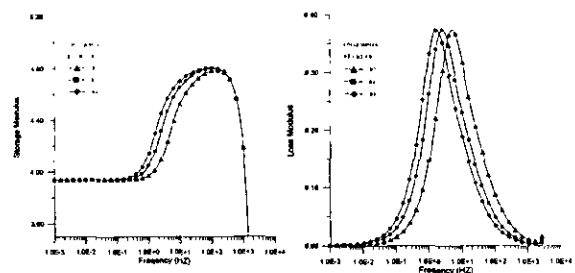


圖 10：儲存模數—  
流阻影響分析  
比較

圖 11：耗損模數—  
流阻影響分析  
比較

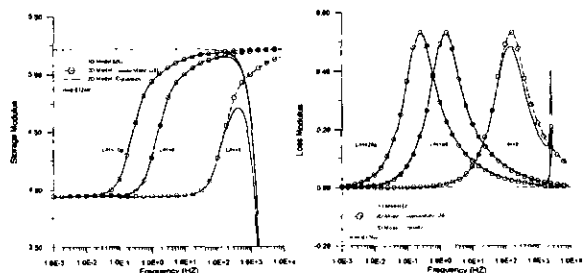


圖 4：儲存模數—  
二維完全動態  
與類靜態分析  
比較

圖 5：耗損模數—  
二維完全動態  
與類靜態分析  
比較

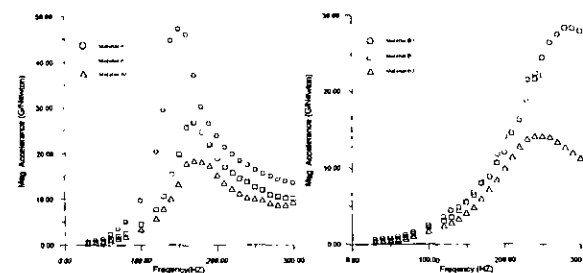


圖 12：材料 A 轉換函數  
關係曲線

圖 13：材料 B 轉換函數  
關係曲線

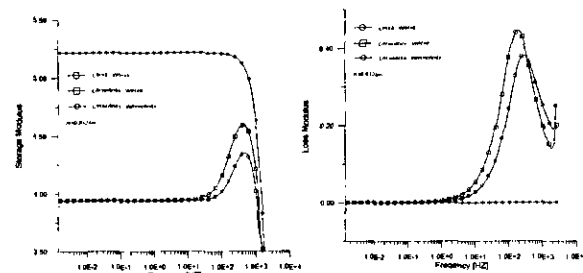


圖 6：儲存模數—  
三維、二維及  
一維完全動態  
分析比較

圖 7：耗損模數—  
三維、二維及  
一維完全動態  
分析比較

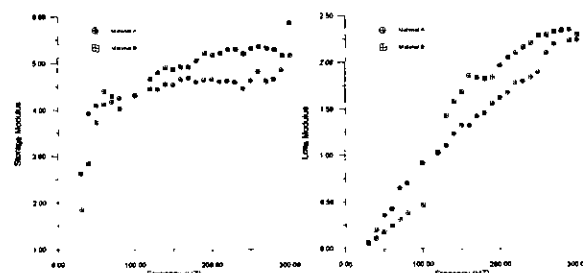


圖 14：材料 A 及 B 之  
儲存模數

圖 15：材料 A 及 B 之  
耗損模數